MODELO DE RESPUESTAS

OBJ 5 PTA 1
Determine si el campo vectorial
\[ F(x, y, z) = (x, e^y \sin(z), e^y \cos(z)) \]
es conservativo. Si lo es, encuentre la función \( f \) tal que \( F = \nabla f \).

Solución:
Calculemos el rotor del campo vectorial \( F \)
\[ \text{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & e^y \sin z & e^y \cos z \end{vmatrix} = (e^y \cos(z) - e^y \cos(z), 0, 0) = (0,0,0) \]
Como \( \text{rot}(F) = 0 \), \( F \) está definida en todo \( \mathbb{R}^3 \) y las derivadas parciales de las componentes de la función \( F \) son continuas, entonces \( F \) es decir conservativo. Así que existe una función potencial \( \phi \) tal que \( \nabla \phi = F \). Tomemos el punto \( (0,0,0) \), y definamos la función potencial \( \phi \) como sigue:
\[ \phi(x,y,z) = \int_{0}^{x} F_1(u,0,0) du + \int_{0}^{y} F_2(x,u,0) du + \int_{0}^{z} F_3(x,y,u) du \]
\[ = \int_{0}^{x} u du + \int_{0}^{y} 0 du + \int_{0}^{z} e^y \cos(u) du = \frac{x^2}{2} + e^y \sin(z) \]

OBJ 6 PTA 2
Calcule la integral de línea
\[ \int_C y^2 \, dx + x \, dy, \]
donde C es el arco de la parábola \( x = 4 - y^2 \) de \((-5, -3)\) a \((0, 2)\).

**Solución:**

Parametrizamos la curva C como sigue:

\[
\begin{align*}
C: \quad & \begin{cases} 
  x = 4 - t^2 \\
  y = t
\end{cases} ; \quad \text{para } t \in [-3, 2].
\end{align*}
\]

Luego:

\[
\int_C y^2 \, dx + x \, dy = \int_{-3}^{2} \left[ -2t^3 - t^2 + 4 \right] \, dt = -\frac{t^4}{4} \bigg|_{-3}^{2} - \frac{t^3}{3} \bigg|_{-3}^{2} + 4t \bigg|_{-3}^{2} =
\]

\[
= \frac{295}{12}.
\]

**OBJ 7  PTA 3**

Calcule la siguiente integral

\[
\int \int_{R} 2y^2 \, \text{sen}(x \, y) \, dy \, dx,
\]

**Solución:** Grafiquemos la región de integración.

En virtud de que los cálculos con respecto a la variable y son muy extenso podemos integrar primero con respecto a la variable x y luego integramos con respecto a la variable y,

\[
\int_{0}^{2} \int_{x}^{2} 2y^2 \, \text{sen}(x \, y) \, dy \, dx = \int_{0}^{2} \int_{0}^{y} 2y^2 \, \text{sen}(x \, y) \, dx \, dy = -\int_{0}^{2} 2y^2 \, \text{cos}(xy) \bigg|_{0}^{y} dy
\]
OBJ 8  PTA 4
Calcule el área del plano $x + y + z = 1$, de la parte acotada por los planos Oxy, Ozy y Oxz.

**Solución:**
Una representación vectorial de la superficie a la cual queremos calcular el área es:

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z) = (x, y, 1-x-y), \text{ con } (x, y) \in D,$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 */ 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1 \}$.

Por lo tanto

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(x, y) = (1, 0, -1) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x, y) = (0, 1, -1),$$

luego

$$\mathbf{N} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right)(x, y) = (1, 1, 1)$$

y así obtenemos:

$$a(S) = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} \sqrt{3} \, dy \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$